

Teorie k početní části

Matematika 3, 2024/25
výťah teorie ze cvičení

Řady

Definice. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **nekonečná řada**. Pro $m \in \mathbb{N}$ definujeme **m -tý částečný součet řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jako

$$s_m = \sum_{n=1}^m a_n.$$

Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit jako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje**, je-li její součet reálné číslo. V opačném případě říkáme, že řada **diverguje**. Konvergenci značíme zkráceně K a divergenci jako D.

Platí:

$\alpha \in \mathbb{R}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K, pak $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ K a $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ K, pak $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ K a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$

Věta 7.1 (Nutná podmínka konvergence). Necht' řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Věta 7.2 (srovnávací kritérium = SK). Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou dvě řady splňující $0 \leq a_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak platí:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ K $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ D $\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ D

Věta 7.3 (limitní srovnávací kritérium = LSK). Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy splňující

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in (0, \infty).$$

Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ K} \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ K}.$$

• $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ K $\iff |q| < 1$

• $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \log^{\beta} n$ K $\iff ((\alpha < -1, \beta \in \mathbb{R}) \vee (\alpha = -1, \beta < -1))$

návod na výběr $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pro (L)SK ([odkaz](#))

Věta 7.6. Necht' $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ K} \iff \alpha > 1.$$

Věta 7.7 (Leibnizovo kritérium). Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. Necht' platí

- $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ K.

Věta 7.4 (Cauchyovo odmocninové kritérium). Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K

(d) $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ D

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ D

Věta 7.5 (d'Alembertovo podílové kritérium).

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K.

(b) $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K

(c) $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K

(d) $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ D

Věta 7.8. Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ K. Pak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K.

Definice. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, pokud je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní. Je-li řada konvergentní ale není absolutně konvergentní, říkáme, že je **neabsolutně konvergentní**.

Fakta/návody:

- $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ K $\iff |q| < 1$
- $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \log^{\beta} n$ K $\iff ((\alpha < -1, \beta \in \mathbb{R}) \vee (\alpha = -1, \beta < -1))$

Řady typu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ lze řešit buď Leibnizem, pomocí Věty 7.8 nebo dle Věty 7.1.

Jak ověřit monotonii:

- dokázat, že $b_{n+1} - b_n \leq 0$ nebo $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a nezápornou posloupnost, pak $\{b_n\}$ nerostoucí
- pokud $b_n = f(n)$, ukázat, že f je monotónní na $[0, \infty)$ - vyšetříme pomocí derivace

Z prvního roku:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Podobné limity - x je v základu mocniny i v exponentu - se řeší pomocí triku

$$a^b = e^{b \log a},$$

Heine a VoLSF (viz níže)...

Věta (Heine - polovina). Necht' $c, A \in \mathbb{R}^*$ a pro reálnou funkci f platí $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$. Bud' $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost prvků z definičního oboru funkce f taková, že $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq c$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Potom platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Věta (VoLSF). Bud' $c, D, A \in \mathbb{R}^*$, a jsou f a g funkce. Necht' platí, že $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = D$ a $\lim_{x \rightarrow D} f(x) = A$. Necht' platí alespoň jedna z podmínek:

$$(P) \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in P(c, \eta) : g(x) \neq D,$$

$$(S) \quad f \text{ je spojitá v } D.$$

Pak platí $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = A$.

Věta (O posloupnosti s kladnými členy). Necht' $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost kladných reálných čísel a $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A,$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^m = A^m \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{A}.$

Vzorce:

- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ (vhodné pro $\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$ apod.)
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

obecně:

- $A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \dots + A^2B^{n-3} + AB^{n-2} + B^{n-1}) = (A - B) \left(\sum_{k=1}^n A^{n-k} B^{k-1} \right)$
- $(A + B)^n = A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} B + \binom{n}{2} A^{n-2} B^2 + \dots + B^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$
- $\cos(n\pi) = (-1)^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$

Lineární algebra

Symbol $\mathbb{K}$ značí množinu $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

Definice. Necht' $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor a $U \subseteq V, U \neq \emptyset$. Pak U je **vektorový podprostor** prostoru V , pokud je tzv. uzavřen na operace $+$ a $\cdot$, tedy pokud platí

- $\forall u, v \in U: u + v \in U$,
- $\forall a \in \mathbb{K}, \forall u \in U: a \cdot u \in U$.

Definice. Je-li $(V, +, \cdot)$ vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $m \in \mathbb{N}, u_1, \dots, u_m \in V, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, pak vektor

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_m u_m$$

nazýváme **lineární kombinace vektorů** $u_1, \dots, u_m$. Pokud jsou všechna λ_i rovna nule, pak jde o **triviální lineární kombinaci**, v opačném případě o **netriviální lineární kombinaci**. Lineární kombinací prázdné množiny vektorů rozumíme nulový vektor.

Definice. Necht' $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor, $m \in \mathbb{N}$ a $u_1, \dots, u_m \in V$. Řekneme, že vektory $u_1, \dots, u_m$ jsou **lineárně závislé**, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace, jež je rovna nulovému vektoru. Pokud vektory $u_1, \dots, u_m$ nejsou lineárně závislé, pak říkáme, že jsou **lineárně nezávislé**. Řekneme, že množina $M \subseteq V$ je **lineárně nezávislá**, jestliže libovolná m -tice po dvou různých vektorů z M je lineárně nezávislá.

Poznámka. Někdy se používá: LN = lineárně nezávislá.

Definice. Je-li $(V, +, \cdot)$ vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$ a $u_1, \dots, u_m \in V$, pak **lineární obal vektorů** $u_1, \dots, u_m$ je

$$\text{lin}_{\mathbb{K}}\{u_1, \dots, u_m\} = \{v \in V: v \text{ je lineární kombinací vektorů } u_1, \dots, u_m\}.$$

Definice. Necht' $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor a $B \subseteq V$. Řekneme, že B je **báze prostoru** V , jestliže množina B je lineárně nezávislá a $V = \text{lin}_{\mathbb{K}}(B)$.

Poznámka. Pokud $\text{lin}_{\mathbb{K}}(B) = V$, tak říkáme, že B **generuje** prostor V . Platí tedy, že pokud je B LN a generuje V , tak je bází prostoru V .

Věta 10.1.

- (i) Každou lineárně nezávislou podmnožinu vektorového prostoru lze doplnit na bázi tohoto prostoru.
- (ii) Každý vektorový prostor má bázi. Počet prvků báze je určen jednoznačně.

Definice. Počet prvků báze budeme nazývat **dimenze prostoru** V . Dimenzi V značíme $\dim V$. Necht' V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Je-li $\dim V < \infty$, řekneme, že V je **konečnědimenzionální**. Je-li $\dim V = +\infty$, mluvíme o **nekonečnědimenzionálním** vektorovém prostoru.

Věta 10.2. Necht' V je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad $\mathbb{K}$.

- (i) Jsou-li $v_1, \dots, v_n \in V$ LN vektory ve V , pak množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je báze prostoru V .
- (ii) Pokud pro $v_1, \dots, v_n \in V$ platí $\text{lin}_{\mathbb{K}}\{v_1, \dots, v_n\} = V$, pak množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je báze prostoru V .

Lineární zobrazení, jádro a obraz:

Definice. Necht' U, V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$. Pak zobrazení $L: U \rightarrow V$ je **lineární**, pokud

- $\forall u_1, u_2 \in U: L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$
- $\forall a \in \mathbb{K} \forall u \in U: L(a \cdot u) = a \cdot L(u)$.

Věta 10.3. Necht' U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$, $L: U \rightarrow V$ necht' je lineární zobrazení. Potom platí:

- (i) $\text{Ker } L$ je vektorový podprostor U .
- (ii) $\text{Im } L$ je vektorový podprostor V .
- (iii) $\dim U = \dim \text{Ker } L + \dim \text{Im } L$.

Věta 5.18 z 2. semestru. Zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je lineární právě tehdy, když existuje $A \in M(n \times n)$ taková, že

$$\forall u \in \mathbb{R}^n: f(u) = Au.$$

Determinant:

Definice. Necht' A je matice typu $n \times n$ s reálnými prvky. Maticí A_{ij} rozumíme matici typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce.

Definice. Necht' $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, n}$. Pak **determinant matice** A definujeme takto:

$$\det A = \begin{cases} a_{11}, & n = 1 \\ \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1}, & n > 1. \end{cases}$$

Pro $\det A$ budeme též používat symbol

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Věta 5.8 z 2. semestru. Necht' $A \in M(n \times n)$.

- (i) Necht' matice A' vznikne z A vyměněním dvou řádků mezi sebou. Pak $\det A' = -1 \det A$.
- (ii) Necht' matice A' vznikne z A tak, že v A jeden řádek vynásobíme reálným číslem λ , pak platí $\det A' = \lambda \det A$.
- (iii) Necht' matice A' vznikne z A tak, že λ -násobek jednoho řádku přičtu k jinému řádku (tj. provedeme třetí řádkovou elementární úpravu), pak $\det A' = \det A$.

Věta 5.9 z 2. semestru. Pro $A \in M(n \times n), j \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Věta 5.10 z 2. semestru. Je-li $A \in M(n \times n)$ je horní (resp. dolní) trojúhelníková matice, pak

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Kvadratické formy:

Definice. Pokud pro $A \in M(n \times n)$ platí $A = A^T$, pak je A **symetrická**.

Je-li $A \in M(n \times n)$ symetrická, pak $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ daná předpisem $\varphi(u) = u^T A u$ je **kvadratická forma** reprezentovaná maticí A .

Definice. Kvadratická forma $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je

- **pozitivně definitní** (PD), pokud

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq \vec{0}: \varphi(u) > 0,$$

- **negativně definitní** (ND), pokud

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq \vec{0}: \varphi(u) < 0,$$

- **pozitivně semidefinitní** (PSD), pokud

$$\forall u \in \mathbb{R}^n: \varphi(u) \geq 0,$$

- **negativně semidefinitní** (NSD), pokud

$$\forall u \in \mathbb{R}^n: \varphi(u) \leq 0,$$

- **indefinitní** (ID), pokud

$$\exists u, v \in \mathbb{R}^n: \varphi(u) > 0 \wedge \varphi(v) < 0.$$

Věta 10.4. Nechť $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,n}$ je diagonální. Pak platí:

- A je pozitivně definitní, právě když $a_{ii} > 0$ pro každé $i = 1, \dots, n$,
- A je negativně definitní, právě když $a_{ii} < 0$ pro každé $i = 1, \dots, n$,
- A je pozitivně semidefinitní, právě když $a_{ii} \geq 0$ pro každé $i = 1, \dots, n$,
- A je negativně semidefinitní, právě když $a_{ii} \leq 0$ pro každé $i = 1, \dots, n$,
- A je indefinitní, právě když existují $i, j \in \{1, \dots, n\}$ taková, že $a_{ii} > 0, a_{jj} < 0$.

Definice. Symetrická úprava matice $A \in M(n \times n)$ = úprava aplikovaná na řádky A a následně tatáž úprava aplikovaná na sloupce A . **Symetrická transformace matice** A = konečná posloupnost symetrických úprav.

Lemma 10.7.

- Je-li $A \in M(n \times n)$ symetrická a $C \in M(n \times n)$, pak CAC^T je opět symetrická.
- Symetrická transformace zachovává symetrii matice.

Věta 10.9. Nechť $A \in M(n \times n)$ je symetrická matice a nechť $B \in M(n \times n)$ vznikne z A pomocí symetrické transformace. Pak matice A je pozitivně definitní (resp. negativně definitní, pozitivně semidefinitní, negativně semidefinitní, indefinitní), právě když B je pozitivně definitní (resp. negativně definitní, . . .).

Věta 10.10. Necht' $A \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak ji lze symetrickou transformací převést na diagonální matici.

Věta 10.11 (Sylvestrovo kritérium). Necht' $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,n}$ je symetrická matice. Pak matice A je

- pozitivně definitní, právě když pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0;$$

- negativně definitní, právě když pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0;$$

- pozitivně semidefinitní, právě když pro každou k -tici přirozených čísel $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, k \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \dots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \geq 0;$$

- negativně semidefinitní, právě když pro každou k -tici přirozených čísel $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, k \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \dots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \geq 0;$$

Vlastní čísla a vektory:

Definice. Necht' $A \in M(n \times n)$. Řekneme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je **vlastní číslo matice** A , jestliže existuje nenulový vektor $x \in \mathbb{C}^n$ takový, že $Ax = \lambda x$. Vektor x pak nazýváme **vlastním vektorem matice A příslušným k vlastnímu číslu λ** .

Věta 10.12. Necht' $A \in M(n \times n)$.

- Prvek $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem matice A , právě když $\det(\lambda I - A) = 0$.
- Matice A má nejvýše n různých vlastních čísel.

Definice. Necht' $A \in M(n \times n)$. Funkce $\lambda \mapsto \det(\lambda I - A)$ se nazývá **charakteristický polynom matice** A . Vzhledem k tvrzení (i) předchozí věty definujeme **násobnost vlastního čísla matice** jako násobnost tohoto čísla jakožto kořene charakteristického polynomu.

Věta 10.13. Necht' $A \in M(n \times n)$ je symetrická. Pak jsou její vlastní čísla reálná.

Věta 10.15. Nechť $A \in M(n \times n)$ je symetrická. Pak platí:

- A je pozitivně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla kladná,
- A je negativně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla záporná,
- A je pozitivně semidefinitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla nezáporná,
- A je negativně semidefinitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla nekladná,
- A je indefinitní, právě když má kladné vlastní číslo i záporné vlastní číslo.

Taylorův polynom

Definice. Nechť f je funkce a $a \in \mathbb{R}$ a f má v bodě a vlastní n -tou derivaci. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorův polynom funkce f v bodě a řádu n** .

Lemma 9.1. Nechť $n \in \mathbb{N}$, Q je polynom stupně $\leq n$ a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. Pak Q je nulový polynom.

Věta 9.2. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a funkce f má v bodě a vlastní n -tou derivaci. Potom $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Věta 9.3 (o jednoznačnosti). Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, funkce f má v bodě a vlastní n -tou derivaci a P je polynom stupně nejvýše n splňující

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Potom $P = T_n^{f,a}$.

Definice. Nechť f a g jsou funkce, $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f je **v bodě a malé o od g** , píšeme $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$, jestliže platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Lemma 9.4. Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.

- Jestliže $f_1(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$ a $f_2(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$, potom $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$.
- Jestliže $f_1(x) = o(g_1(x)), x \rightarrow a$ a $f_2(x) = o(g_2(x)), x \rightarrow a$, potom $f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x)), x \rightarrow a$.
- Jestliže $f_1(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$ a f_2 je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a , potom $f_1(x)f_2(x) = o(g(x)f_2(x)), x \rightarrow a$.
- Jestliže $f(x) = o(g_1(x)), x \rightarrow a$ a existuje vlastní $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$, potom $f(x) = o(g_2(x)), x \rightarrow a$.
- Jestliže $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$ a h je omezená na jistém prstencovém okolí bodu a , potom $h(x)f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$.
- Jestliže $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \leq n$ a $f(x) = o((x-a)^n), x \rightarrow a$, potom $f(x) = o((x-a)^m), x \rightarrow a$.

Věta 9.5. Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $f(y) = o(g(y))$, $y \rightarrow b$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$ a existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(a, \delta): \varphi(x) \neq b.$$

Potom $f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x)))$, $x \rightarrow a$.

Věta 9.7 (známé rozvoje). Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí:

- $T_k^{\exp,0}(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{k!}x^k$,
- $T_{2k-1}^{\sin,0}(x) = T_{2k}^{\sin,0}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}$,
- $T_{2k}^{\cos,0}(x) = T_{2k+1}^{\cos,0}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k}$,
- $T_k^{\log(1+y),0}(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{k}x^k$,
- $T_k^{(1+y)^\alpha,0}(x) = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \dots + \binom{\alpha}{k}x^k$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-j+1)}{j!}$.

Lokální extrémy

Definice. Funkce f nabývá v bodě a **ostrého lokálního maxima**, pokud

$$\exists \delta > 0 \forall y \in B(x, \delta), x \neq y: f(y) < f(x).$$

Funkce f nabývá v bodě a **ostrého lokálního minima**, pokud

$$\exists \delta > 0 \forall y \in B(x, \delta), x \neq y: f(y) > f(x).$$

Definice. Bod $a \in \mathbb{R}^n$, v němž platí $\nabla f(a) = 0$ nazýváme **stacionární bod** funkce f .

Definice. Je-li $G \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená množina, $a \in G$ a $f \in \mathcal{C}^1(G)$, pak **gradient funkce f v bodě a** je vektor

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} f(a), \frac{\partial f}{\partial x_2} f(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} f(a) \right).$$

Definice. Necht $G \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená množina a $a \in G$, $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Pak definujeme **Hessovu matici**

$$\nabla^2 f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, n}$$

Věta 10.1. Budiž $f \in \mathcal{C}^2(G)$, $a \in G$ a necht a je stacionární bod funkce f . Potom platí:

- $\nabla^2 f(a)$ ND $\implies$ a je bod ostrého lokálního maxima funkce f .
- $\nabla^2 f(a)$ PD $\implies$ a je bod ostrého lokálního minima funkce f .
- $\nabla^2 f(a)$ ID $\implies$ a není bodem lokálního extrému funkce f .